ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right), \quad (1)$$

όπου a_i, b_i, c_i $\in R$ ($i = 1,2$) και $|a_2| + |b_2| \neq 0$, $|c_1| + |c_2| \neq 0$.

Μέθοδος επίλυσης:

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \xi \\ y &= y_1 + \eta \end{aligned}, \quad (2)$$

όπου ξ και η είναι δύο πραγματικές σταθερές οι οποίες θα προσδιοριστούν κατάλληλα στη συνέχεια. Από τις σχέσεις (2) έχουμε

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 + a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 + a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \end{aligned}$$

και

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}.$$

Παρατηρούμε ότι αν επιλέξουμε ξ και η τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 &= 0 \\ a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 &= 0 \end{aligned}, \quad (3)$$

τότε η εξίσωση (1) παίρνει τη μορφή

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1 x_1 + b_1 y_1}{a_2 x_1 + b_2 y_1}\right), \quad (4)$$

η οποία είναι ομογενής και επιλύεται κατά τα γνωστά. Φυσικά, το γραμμικό σύστημα (3) έχει λύση αν και μόνον αν

$$D := a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0. \quad (5)$$

Αν τώρα $D=0$ τότε θα υπάρχει $\lambda \in R$ τέτοιο ώστε $a_1 = \lambda a_2$ και $b_1 = \lambda b_2$. Έτσι, στην περίπτωση αυτή η εξίσωση (1) ανάγεται σε χωριζόμενων μεταβλητών με τη βοήθεια του μετασχηματισμού

$$z = a_1 x + b_1 y. \quad (6)$$

ΑΣΚΗΣΗ:

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση: $y' = \dfrac{x+y-2}{y-x-4}$.

Λυση

Εκτελώντας τον μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \xi \\ y &= y_1 + \eta \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} \xi + \eta - 2 &= 0 \\ -\xi + \eta - 4 &= 0 \end{aligned}$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} x &= x_1 - 1 \\ y &= y_1 + 3 \end{aligned}. \quad (1)$$

Με βάση τώρα τις σχέσεις (1) η δοθείσα διαφορική εξίσωση παίρνει την μορφή

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{y_1 - x_1}, \quad (2)$$

η οποία είναι ομογενής. Θέτοντας έτσι

$$y_1 = u x_1, \quad (3)$$

η (2) γίνεται

$$u + x_1 u' = \frac{1+u}{u-1},$$

ή ισοδύναμα

$$x_1 u' = \frac{1+2u-u^2}{u-1}. \quad (4)$$

Διαχωρίζοντας τώρα τις μεταβλητές στην (4) και υποθέτοντας ότι $u \neq -1 \pm \sqrt{2}$ παίρνουμε, ύστερα από απλούς υπολογισμούς, ότι

$$-\frac{1}{2}\left[\ln|u-(1+\sqrt{2})| + \ln|u-(1-\sqrt{2})|\right] = \ln|x_1| + \ln|C|,$$

ή

$$u^2 - 2u - 1 = Cx_1^{-2},$$

ή, με βάση την (3),

$$y_1^2 - 2x_1 y_1 - x_1^2 = C,$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη μη μηδενική σταθερά. Επιστρέφοντας τώρα στις αρχικές μεταβλητές (1) έχουμε

$$y^2 - 2xy - x^2 + 4x - 8y = C.$$

Τέλος, αν $u = -1 \pm \sqrt{2}$ τότε παίρνουμε και τις ακόλουθες δύο ειδικές λύσεις

$$\frac{y+3}{x+1} = -1 \pm \sqrt{2}.$$